

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:

Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom. Die Galoisgruppe von f über $\mathbb{Q}$ habe ungerade Ordnung. Man zeige, dass f nur reelle Nullstellen hat.

(7 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $f(X, Y) = X^{17} + Y^{41}(X^3 + X + 1) - Y \in \mathbb{C}[X, Y]$.

- a) Man zeige, dass f als Polynom in X über dem Koeffizientenring $\mathbb{C}[Y]$ irreduzibel ist. (Hinweis: Eisenstein-Kriterium)
- b) Man zeige, dass f ein irreduzibles Element im Ring $\mathbb{C}[X, Y]$ ist.

(8 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $p^m > 1$, mit $m \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl.

- a) Man zeige, dass jede maximale Untergruppe von G ein Normalteiler vom Index p ist.
- b) Sei N der Schnitt der maximalen Untergruppen von G . Man zeige, dass G/N abelsch ist und Exponent p hat. (Der Exponent einer endlichen Gruppe ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Elementordnungen.)

(8 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei R der Restklassenring $\mathbb{Z}/2006\mathbb{Z}$.

- a) Wie viele Nullstellen hat das Polynom $X^2 - 1$ in R ?
- b) Wie viele Nullstellen hat das Polynom $X^3 - 1$ in R ?

(7 Punkte)