

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Zeigen Sie: Eine ungerade Primzahl p ist Teiler einer Zahl $n^2 + 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn $p \equiv 1 \pmod{4}$ gilt. (7 Punkte)

Aufgabe 2:

Zeigen Sie: Ist G eine endliche Gruppe, so existiert eine natürliche Zahl n derart, dass G isomorph ist zu einer Untergruppe der alternierenden Gruppe A_n . (6 Punkte)

Aufgabe 3:

a) Beweisen Sie, dass

$$f := X^3 + X^2 - 2X - 1$$

in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

b) Zeigen Sie, dass f eine reelle Nullstelle α im offenen Intervall $]1, 2[$ besitzt.

c) Zeigen Sie, dass neben α auch $-\frac{1}{\alpha+1}$ Nullstelle von f ist.

d) Folgern Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha)$ ein Zerfällungskörper von f ist.

e) Wie viele Elemente enthält die Galoisgruppe von f über $\mathbb{Q}$?

(10 Punkte)

Aufgabe 4:

Es sei L/K eine algebraische Körpererweiterung und $\sigma : L \rightarrow L$ ein K -Endomorphismus von L , also $\sigma|_K = \text{id}_K$.

Beweisen Sie, dass σ ein K -Automorphismus von L ist.

(7 Punkte)