

**Thema Nr. 2**  
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1:**

Es seien die Polynome  $p(X) = X^{500} - 2X^{301} + 1$  und  $q(X) = X^2 - 1$  in  $\mathbb{Q}[X]$  gegeben. Berechnen Sie den Rest der Division von  $p(X)$  durch  $q(X)$ . (8 Punkte)

**Aufgabe 2:**

In einem kommutativen Ring  $R$  sei  $r \in R$  die Summe zweier Quadrate, also  $r = a^2 + b^2$  für geeignete  $a, b \in R$ . Zeigen Sie, dass dann auch  $2r$  eine Summe zweier Quadrate ist. (8 Punkte)

**Aufgabe 3:**

Sei  $G$  eine Gruppe. Für  $h \in G$  definieren wir den Gruppenautomorphismus

$$\phi_h: G \longrightarrow G, \quad g \longmapsto hgh^{-1}.$$

Die Automorphismen  $\phi_h$  mit  $h \in G$  nennt man *innere Automorphismen* von  $G$ . Wir definieren

$$\text{Inn}(G) = \{\phi_h \mid h \in G\} \subseteq \text{Aut}(G)$$

und das Zentrum von  $G$ ,

$$Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx \text{ für alle } y \in G\}.$$

- a) Zeigen Sie, dass  $\text{Inn}(G)$  ein Normalteiler in  $\text{Aut}(G)$  ist. (4 Punkte)  
b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi: G \longrightarrow \text{Inn}(G), \quad h \longmapsto \phi_h$$

einen Gruppenisomorphismus  $G/Z(G) \rightarrow \text{Inn}(G)$  induziert. (4 Punkte)

- c) Beschreiben Sie alle Automorphismen der zyklischen Gruppe  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  mit sieben Elementen und begründen Sie, weshalb in  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  nur die Identität ein innerer Automorphismus ist. (6 Punkte)

**Aufgabe 4:**

Seien  $a, b \in \mathbb{Q}$  und sei  $K$  der Zerfällungskörper des Polynoms

$$P(X) = X^3 + aX + b \in \mathbb{Q}[X].$$

Wir nehmen an, dass  $P(X)$  keine Nullstellen in  $\mathbb{Q}$  hat. Zeigen Sie:

- a)  $P(X)$  ist irreduzibel in  $\mathbb{Q}[X]$  und hat keine mehrfachen Nullstellen in  $K$ . (3 Punkte)
- b) Die Galoisgruppe  $G := \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$  ist eine Untergruppe von  $S_3$ . (3 Punkte)
- c)  $G$  hat entweder 3 oder 6 Elemente. (3 Punkte)
- d) Sei  $\delta = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)$ , wobei  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K$  die Nullstellen von  $P(X)$  sind. Dann gilt für  $\sigma \in G$  stets  $\sigma(\delta) = \delta$  oder  $\sigma(\delta) = -\delta$ . (3 Punkte)
- e) Gilt  $\sigma(\delta) = \delta$  für alle  $\sigma \in G$ , dann ist  $G$  zyklisch und hat Ordnung 3. Anderenfalls ist  $G = S_3$ . (4 Punkte)

**Aufgabe 5:**

Wir schreiben  $C^\infty(\mathbb{R})$  für den Ring (unter punktwiser Addition und Multiplikation) und  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren reellen Funktionen.

Eine Funktion  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  heiße *D-finit*, wenn der von  $f$  und allen Ableitungen  $f', f'', f''', \dots$  erzeugte  $\mathbb{R}$ -Untervektorraum  $D(f)$  von  $C^\infty(\mathbb{R})$  endlich-dimensional ist.

Zeigen Sie, dass die D-finiten Funktionen einen Unterring von  $C^\infty(\mathbb{R})$  bilden. (14 Punkte)