

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei K ein Körper und $V = K^{2 \times 2}$ der K -Vektorraum der 2×2 -Matrizen über K . Für $A, B \in K^{2 \times 2}$ betrachten wir die Abbildung $\Phi: V \rightarrow V, X \mapsto AXB$.

Zeigen Sie:

- (a) Φ ist ein Endomorphismus von V .
- (b) $\text{Spur}(\Phi) = \text{Spur}(A) \text{Spur}(B)$.

Aufgabe 2:

Seien $R = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ und $f: R \rightarrow R, x \mapsto 7x$.

- (a) Zeigen Sie, dass f bijektiv und damit eine Permutation von R ist.
- (b) Bestimmen Sie die Fixpunkte von f .
- (c) Bestimmen Sie die Anzahl der Bahnen der Operation von $\langle f \rangle$ auf R .
Hier steht $\langle f \rangle$ für die von f erzeugte Untergruppe der Gruppe der Permutationen von R .

Aufgabe 3:

- (a) Geben Sie die Definition einer *auflösbaren Gruppe* an.
- (b) Zeigen Sie: Jede Gruppe G der Ordnung 2020 ist auflösbar.
- (c) Geben Sie zwei nicht-isomorphe abelsche und zwei nicht-isomorphe nicht-abelsche Gruppen der Ordnung 2020 an (mit Begründung).

Aufgabe 4:

Sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive elfte Einheitswurzel und $K = \mathbb{Q}(\zeta)$.

- (a) Zeigen Sie: K ist der Zerfällungskörper von $X^{11} - 1$ über $\mathbb{Q}$ und geben Sie den Isomorphietyp der Galois-Gruppe $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ an.
- (b) Zeigen Sie: Es gibt eine galoissche Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq L$ mit $[L : \mathbb{Q}] = 5$.

Aufgabe 5:

Ein n -Tupel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ von ganzen Zahlen heiße *hübsch*, wenn $a_i a_j + 2$ eine Quadratzahl ist für alle $1 \leq i < j \leq n$. Zeigen Sie:

- (a) Es gibt hübsche Tripel.
- (b) Wenn ein Quadrupel hübsch ist, dann ist keine der Zahlen a_j ($j=1, \dots, 4$) durch 4 teilbar.
- (c) Es gibt keine hübschen Quadrupel.