## Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

**Vorbemerkung:** *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.*

### Aufgabe 1:

Seien $p, q$ Primzahlen mit $p < q$. Zeigen Sie:

a) Im Fall $p \nmid (q-1)$ ist jede Gruppe der Ordnung $pq$ abelsch.

b) Jede abelsche Gruppe der Ordnung $pq$ ist zyklisch.

c) Im Fall $p \mid (q-1)$ gibt es eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung $pq$.

### Aufgabe 2:

Gegeben ist der Ring $R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-3}$. Zeigen Sie:

a) $\pm 1$ sind die einzigen Einheiten in $R$.

b) $2$ ist ein irreduzibles Element in $R$ aber kein Primelement.

c) $R$ ist kein faktorieller Ring.

### Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass die folgenden Polynome irreduzibel sind:

a) $5X^3 + 63X^2 + 168$ in $\mathbb{Z}[X]$.

b) $X^4 + X + 1$ in $\mathbb{F}_2[X]$.

c) $X^9 + XY^7 + Y$ in $\mathbb{Z}[X, Y]$.

### Aufgabe 4:

Seien $p, q$ verschiedene Primzahlen.

a) Zeigen Sie, dass die Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ nicht isomorph sind.

b) Zeigen Sie, dass der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ vom Grad 4 über $\mathbb{Q}$ ist.

c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\alpha = \sqrt{p} + \sqrt{q}$ über $\mathbb{Q}$.

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 5:**

Sei $p$ eine Primzahl und $\zeta_p$ eine primitive $p$-te Einheitswurzel. Zeigen Sie:

a) Zu jedem natürlichen Teiler von $p-1$ gibt es genau einen Teilkörper $K_n$ von $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ mit

$$[K_n : \mathbb{Q}] = n \quad .$$

b) Der einzige über $\mathbb{Q}$ quadratische Teilkörper von $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ ist $\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)$.