

**Thema Nr. 3**

## (Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

**Vorbemerkung:** Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen.

**Aufgabe 1** (7 Punkte):

- Bestimmen Sie alle Isomorphietypen abelscher Gruppen mit 56 Elementen!
- Zeigen Sie: Jede Gruppe mit 56 Elementen enthält eine normale Sylowuntergruppe  $\neq 1$ .
- Zeigen Sie: Enthält eine solche Gruppe  $G$  mit 56 Elementen eine nicht-normale 7-Sylowuntergruppe  $H$  und bezeichnet  $K$  die 2-Sylowuntergruppe in  $G$ , so ist  $K \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

[Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass der Zentralisator von  $K$  in  $H$  trivial ist und folgern Sie daraus, dass  $H$  auf den Elementen  $\neq 1$  von  $K$  transitiv operiert.]

**Aufgabe 2** (9 Punkte):

Es sei  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Z}\}$ . Zeigen Sie:

- Die Abbildung

$$N : R \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad a + b\sqrt{2} \mapsto |a^2 - 2b^2|$$

ist multiplikativ.

- $R$  ist ein euklidischer Ring bezüglich  $N$ .
- Ein Element  $r \in R$  ist genau dann eine Einheit, wenn  $N(r) = 1$  ist.
- $R$  besitzt unendlich viele Einheiten.
- Zerlegen Sie das Element 21 in  $R$  in Primfaktoren.

**Aufgabe 3** (7 Punkte):

Geben Sie alle Lösungen  $X$  der Gleichung

$$X^7 = \mathbb{1}_5$$

in der Gruppe  $GL_5(\mathbb{Q})$  an (mit Begründung).

**Aufgabe 4** (7 Punkte):

- Geben Sie ein Verfahren an, um mit Zirkel und Lineal zu einem gegebenen Dreieck ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt zu konstruieren!
- Sei  $\alpha$  eine algebraische Zahl vom Grad 4 über  $\mathbb{Q}$  und  $N$  der normale Abschluss von  $\mathbb{Q}(\alpha)$ . Zeigen Sie: Wenn  $\text{Gal}(N|\mathbb{Q})$  isomorph zur alternierenden Gruppe  $A_4$  ist, kann  $\alpha$  nicht mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.