

Thema Nr. 2
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung:

Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:

Sei G eine endliche Gruppe und $1 \leq e \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl, so dass $g^e = 1$ ist für alle $g \in G$. Zeigen Sie, dass e ein Teiler der Ordnung $|G|$ von G ist und dass jede Primzahl p , welche $|G|$ teilt, auch e teilt. Geben Sie eine Gruppe G an, für die $e < |G|$ gilt. (6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei G eine endliche Gruppe und $g \in G$ ein Element der Ordnung $|\langle g \rangle| = p^r$, p eine Primzahl, $r \geq 1$. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Elemente der Ordnung p^r in G ein Vielfaches von $p^{r-1}(p-1)$ ist. Geben Sie eine Gruppe mit $|G| = 12$ an, die 6 Elemente der Ordnung 4 enthält. (6 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei K ein Körper und $K[X, Y]$ der Polynomring über K in den zwei Variablen X, Y . Sei I das von X^3, Y^3, X^2Y^2 erzeugte Ideal. Bestimmen Sie $\dim_K(K[X, Y]/I)$. Es bezeichne S den Ring $K[X, Y]/I$. Zeigen Sie, dass S genau ein echtes Primideal J enthält. Bestimmen Sie $\dim_K(S/J)$. (6 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit q Elementen. Sei p irgendeine Primzahl. Bestimmen Sie die Anzahl der irreduziblen Polynome vom Grade p^2 über $\mathbb{F}_q$. (6 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei $L|K$ eine galoissche Erweiterung mit Galoisgruppe G . Sei $|G| = 85$. Zeigen Sie, dass L Teilkörper vom Grade 5 und vom Grade 17 über K enthält, die normal über K sind. (6 Punkte)