

**Thema Nr. 1**  
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1:**

Welche der folgenden Aussagen sind *richtig* bzw. *falsch*? Geben Sie jeweils eine *kurze* Begründung an:

- a) Die symmetrische Gruppe  $S_3$  und die additive Gruppe  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  sind isomorph.
- b) Die Primzerlegung von  $10 \in \mathbb{Z}[i]$  lautet

$$10 = (1+i)(1-i)(2+i)(2-i).$$

- c) Es ist  $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{11}, i)$  ein Zerfällungskörper des Polynoms  $X^4 - 11 \in \mathbb{Q}[X]$ .
- d) In  $\mathbb{R}[X]$  ist  $(X)$  ein Primideal.

(12 Punkte)

**Aufgabe 2:**

Es sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $750 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$ . Mit  $\text{Syl}_5$  bezeichnen wir die Menge der 5-Sylowgruppen von  $G$  und mit  $n_5$  bezeichnen wir die Mächtigkeit von  $\text{Syl}_5$ .

- a) Begründen Sie, dass  $n_5 \in \{1, 6\}$  gilt.
- b) Begründen Sie, dass  $G$  im Fall  $n_5 = 1$  nicht einfach ist.
- c) Begründen Sie, dass

$$\cdot : G \times \text{Syl}_5 \rightarrow \text{Syl}_5, (g, P) \mapsto g P g^{-1}$$

eine transitive Operation von  $G$  auf  $\text{Syl}_5$  ist.

- d) Begründen Sie, dass  $G$  im Fall  $n_5 = 6$  nicht einfach ist.

*Hinweis:* Betrachten Sie den Kern des Homomorphismus  $\lambda : G \rightarrow S_6$ , der durch die Operation aus (c) gegeben ist.

(14 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 3:**

Es sei  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  eine Matrix über den komplexen Zahlen, hierbei gelte  $\lambda \neq 0$ . Man zeige, dass

für alle  $k \geq 1$  die Matrix  $A^k$  die Jordansche Normalform  $\begin{pmatrix} \lambda^k & 1 \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$  hat.

(6 Punkte)

**Aufgabe 4:**

Wir betrachten den Ring  $R = \mathbb{Q}[X]/(X^{10} - 1)$ .

- a) Bestimmen Sie ein kartesisches Produkt von Körpern, das zu  $R$  isomorph ist.

*Hinweis:* Der chinesische Restsatz kann hilfreich sein.

- b) Wie viele Ideale besitzt  $R$ ?

(12 Punkte)

**Aufgabe 5:**

Es sei  $f = X^3 + X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ ; weiter sei  $a \in \mathbb{C}$  eine Wurzel von  $f$ .

- a) Zeigen Sie:  $f$  ist irreduzibel.  
b) Geben Sie den Grad  $[L : \mathbb{Q}]$  des Zerfällungskörpers  $L$  von  $f$  über  $\mathbb{Q}$  an.  
c) Geben Sie den Isomorphietyp der Galoisgruppe  $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$  an.  
d) Geben Sie  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Q}$  an mit

$$a^4 - 2a^3 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot a + \lambda_3 \cdot a^2.$$

(16 Punkte)