

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei K ein Körper. Eine quadratische Matrix $A \in M_n(K)$ heißt nilpotent, wenn ein $m \in \mathbb{N}$ mit $A^m = 0$ existiert. Zeigen Sie:

- i) Ist $A \in M_n(K)$ nilpotent, so gilt für das charakteristische Polynom $\chi_A(X) = X^n$.
- ii) Ist $A \in M_n(K)$ nilpotent und diagonalisierbar, so gilt $A = 0$.

(8 Punkte)

Aufgabe 2:

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne S_n die n -te symmetrische Gruppe. Die Gruppe S_n und ihre Untergruppen operieren in natürlicher Weise von links auf der Menge $\{1, \dots, n\}$. Ferner sei p eine Primzahl.

- i) Für Untergruppen G_1 und G_2 in S_n sei G_2 ein Normalteiler in G_1 und G_1 operiere transitiv auf der Menge $\{1, \dots, n\}$. Zeigen Sie, dass alle G_2 -Bahnen in $\{1, \dots, n\}$ dieselbe Länge haben.
- ii) Für Untergruppen G_1 und G_2 in S_p sei G_2 ein Normalteiler in G_1 und G_1 operiere transitiv auf $\{1, \dots, p\}$. Zeigen Sie, dass G_2 transitiv auf $\{1, \dots, p\}$ operiert, falls $G_2 \neq \{\text{id}\}$ gilt.
- iii) Sei H eine Untergruppe von S_p , die transitiv auf $\{1, \dots, p\}$ operiert und eine Primzahlordnung q hat. Zeigen Sie, dass $p = q$ gilt und H ein Element der Ordnung p enthält.

(15 Punkte)

Aufgabe 3:

Ist p eine Primzahl und $q = p^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so bezeichne $\mathbb{F}_q$ den endlichen Körper mit q Elementen. Betrachten Sie die Polynome $f = X^7 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ und $g = X^7 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

- i) Zeigen Sie, dass f keine Nullstellen in den Körpern $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_4$ und $\mathbb{F}_8$ besitzt.
- ii) Folgern Sie aus i), dass f irreduzibel in $\mathbb{F}_2[X]$ ist.
- iii) Zeigen Sie, dass g irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

(14 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Sei L der Zerfällungskörper von $X^{12} - 729 \in \mathbb{Q}[X]$ in $\mathbb{C}$ und ζ die primitive 12-te Einheitswurzel $\exp(2\pi i/12) = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \in \mathbb{C}$.

- i) Zeigen Sie: $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\zeta)$ und $L = \mathbb{Q}(\zeta)$.
- ii) Zeigen Sie, dass $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ eine abelsche Gruppe der Ordnung vier ist, die genau drei Elemente der Ordnung zwei enthält.
- iii) Beschreiben Sie alle echten Zwischenkörper der Erweiterung $L/\mathbb{Q}$, indem Sie für jeden echten Zwischenkörper ein primitives Element angeben.

(15 Punkte)

Aufgabe 5:

Das irreduzible Polynom $f \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ besitze eine Nullstelle $\alpha \in \mathbb{R}$ und eine Nullstelle $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Sei L der Zerfällungskörper von f in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ nicht abelsch ist.

(8 Punkte)